פרק י"ב: תורת ההיסק

הכלי לאימות טענות מתמטיות הוא ההוכחה, ומאז שהתחלנו ללמוד גיאומטריה בחטיבת הביניים אנו משתמשים בכלי זה, ומפעילים אותו בתחומים השונים של המתמטיקה בהם אנו עוסקים. במיוחד, בקורס הלוגיקה הוכחנו משפטים רבים על הלוגיקה. לא הגדרנו במדוייק מהי הוכחה, אבל למרות זאת הסתדרנו לא רע עם מושג זה, וגם אם היה לנו ויכוח עם עמית אם הוכחה מסויימת היא נכונה ויכוח זה הסתיים תמיד כאשר אחד מן המתווכחים שכנע את רעהו. אולם מכיוון שהלוגיקה היא החקר של השפה המתמטית עלינו לתת הגדרה מדוייקת של מושג ההוכחה בתחשיב היחסים, ולחקור את היכולות והמגבלות של כלי זה. שפת תחשיב היחסים היא שפה מתמטית אידאלית והשפה בה אנו מדברים כאשר אנו עוסקים במתמטיקה היא עגה מאוד משוחררת שלה. בדומה, גם מושג ההוכחה שנביא כאן הוא מושג מאוד מכני ועגת ההוכחה בה כולנו משתמשים רחוקה ממנו מרחק רב. עם זאת ההבדלים בין ההוכחות שאנו מוכיחים למעשה לבין ההוכחות הפורמליות של תחשיב היחסים הם רק הבדלים של נוחות והתבטאות שאינם משנים באמת את כוחו ומגבלותיו של כלי ההוכחה.

אפשר גם לדבר על מושג של הוכחה בשפות שאינן בנות מנייה, אבל אין לנו ענין בכך בקורס זה ולכן נעסוק בפרק זה רק בשפות בנות מנייה, כלומר בשפות שקבוצת הקבועים שלהן היא סופית או בת מנייה.

12.1 הגדרה. א. שפה L' של תחשיב היחסים נקראת **העשרה פשוטה**, ובקיצור **העשרה** של שפה L של תחשיב היחסים אם קבועי L' הם קבועי L בתוספת של קבועים אישיים (כולל תוספת של 0 קבועים אישיים).

ב. למבנה $\boldsymbol{A}$ ששפתו L, מבנה $\boldsymbol{A}'$ נקרא **העשרה** של $\boldsymbol{A}$ אם השפה L' שלו היא העשרה של L, העולם A' שלה שווה לעולם A של $\boldsymbol{A}$, ולכל קבוע C של L קיים $\boldsymbol{A}'(\mathsf{C}) = \boldsymbol{A}(\mathsf{C})$. במילים אחרות, $\boldsymbol{A}'$ היא בדיוק כמו $\boldsymbol{A}$, רק שהיא מכילה גם את הפשר של קבועים נוספים על קבועי השפה של $\boldsymbol{A}$. נזכיר כי, לפי 8.28, פסוקי L האמיתיים בהעשרה של $\boldsymbol{A}$ הם בדיוק פסוקי L האמיתיים ב-$\boldsymbol{A}$. אם W היא קבוע או קבוצה של קבועים אנו אומרים ש-$\boldsymbol{A}'$ היא העשרה של $\boldsymbol{A}$ ל-W אם השפה L' של $\boldsymbol{A}'$ היא השפה L של $\boldsymbol{A}$ בתוספת הקבועים של W.

מבנה $\boldsymbol{A}'$ שהוא העשרה של $\boldsymbol{A}$ נקרא **העשרה פשוטה** של $\boldsymbol{A}$ אם שפתו היא העשרה פשוטה של שפת $\boldsymbol{A}$, כלומר הוא העשרה של $\boldsymbol{A}$ לקבוצה כלשהי של קבועים אישיים.

בהגדרה הבאה נגדיר את מושג ההוכחה ואת המושגים הבסיסיים הקשורים עם מושג זה. המושגים הסמנטיים נקבעו ע"י הפרוש של הקשרים והכמתים ולא היו לנו דרגות חופש בהגדרת המושגים הסמנטיים, ואם נראה כיצד הם מוגדרים בספרים שונים נמצא שההבדלים הם רק בסימונים. לעומת זאת בקביעת מושג ההוכחה יש לנו חופש רב ובספרים שונים אנו רואים מושגים שונים של הוכחה, גם אם בגדול התמונה היא אותה התמונה. מושג ההוכחה מאופיין ע"י שתי בחירות שלנו, שיש קשר ביניהן, והן שבהוכחות כאן יופיעו רק פסוקים, בעוד שמושגי הוכחה אחרים משתמשים גם בנוסחאות שאינן פסוקים, וההוכחות כאן נעשות לא בשפה L בה נמצאים הפסוקים אותם אנו מוכיחים, אלא בשפות המכילה קבועים אישיים נוספים, שנסמנן בדרך כלל ב-L'.

נסביר עתה מדוע ההוכחה של פסוק נעשית לאו דווקא בשפה שלו אלא בהעשרה שלה המתקבלת ע"י הוספת קבועים אישיים. פעמים רבות, כאשר אנו רוצים להוכיח משפט לכל מספר x אנו פועלים כדלקמן. אנו מתחילים ב"יהי x מספר כלשהו". כעת אנחנו מדברים במהלך ההוכחה על x כעל מספר קבוע ומוכיחים משהו על x, ולבסוף אנו אומרים "מכיוון ש-x הוא מספר ממשי כלשהו לכן מה שהוכחנו נכון לכל x". מה שאנו נעשה כאן הוא שנוכיח תחילה משהו לקבוע אישי c, ואז אם זה הוכח ללא כל הנחה על c נסיק מכך שהדבר קיים לכל x.

12.2 הגדרה. א. **כלל היסק** (deduction rule) **n-מקומי** הוא יחס $n+1$-מקומי כריע על קבוצת הפסוקים של L'.

אם r הוא כלל היסק n-מקומי וקיים $r(\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi)$ אז אנו קוראים ל- $\phi_1,\ldots,\phi_n$ בשם **ההנחות** (antecedents) של הכלל ול-ψ בשם **המסקנה** (consequent) של הכלל. מקובל לכתוב כלל היסק בצורה

הבאה המבהירה אותו יותר.

$$\frac{\phi_1,\ldots,\phi_n}{\psi}$$

ונראה מייד דוגמה לכך.

מה שכלל היסק r אומר לנו הוא שאם קיים $r(\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi)$ אז במהלך ההוכחה אנו רשאים להסיק את הפסוק ψ מן הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ שהופיעו בשלבים קודמים של ההוכחה.

כלל היסק שימושי מאוד הוא כלל ההיסק הדו-מקומי **כלל הניתוק** (rule of detachment, modus ponens) שהוא היחס $r(\phi_1,\phi_2,\psi)$ הקיים כאשר $\phi_2=\phi_1\to\psi$. כלל זה אומר לנו שאם כבר ידועים לנו ϕ_1 ו-$\phi_1\to\psi$ אנו רשאים להסיק מהם את ψ. את הכלל הזה מקובל גם לכתוב כך:

$$\frac{\phi\,,\phi\to\psi}{\psi}$$

ג. **מערכת היסק** $\mathfrak{D}$ לשפה L מורכבת מקבוצה כריעה של פסוקים אמיתיים לוגית הנמצאים בהעשרה פשוטה L' של L, והנקראים **האקסיומות הלוגיות של** $\mathfrak{D}$, וממספר סופי של כללי היסק נאותים, כאשר מושג הנאותות של כלל היסק מוגדר ב-12.6.

ד. **הוכחה** ב-$\mathfrak{D}$ זאת סידרת פסוקים בהעשרה פשוטה L' של L בה כל פסוק הוא אקסיומה לוגית של $\mathfrak{D}$, או שהוא מתקבל מפסוקים קודמים בסידרה ע"י אחד מכללי ההיסק של $\mathfrak{D}$.

ה. **הוכחה** של ϕ ב-$\mathfrak{D}$ זאת הוכחה ב-$\mathfrak{D}$ ש-ϕ הוא הפסוק האחרון בה. פסוק ב-L' נקרא **פסוק יכיח** (provable) ב-$\mathfrak{D}$ או **משפט** (theorem) של $\mathfrak{D}$ אם יש לו הוכחה ב-$\mathfrak{D}$. אנו כותבים $\vdash_{\mathfrak{D}}\phi$ כדי לציין ש-ϕ פסוק יכיח ב-$\mathfrak{D}$.

ו. **הוכחה** ב-$\mathfrak{D}$ **מקבוצת פסוקים** Γ ב-L' זאת סידרת פסוקים ב-L' בה כל פסוק הוא אקסיומה לוגית של $\mathfrak{D}$, או איבר של Γ, או שהוא מתקבל מפסוקים קודמים בסידרה ע"י אחד מכללי ההיסק של $\mathfrak{D}$. תתכנה הגבלות על כללי ההיסק התלויות בקבוצת הפסוקים Γ. **הוכחה של** ϕ מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$ זאת הוכחה מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$ ש-ϕ הוא הפסוק האחרון בה. **פסוק יכיח מ**-Γ ב-$\mathfrak{D}$, או **משפט של** Γ ב-$\mathfrak{D}$ זה פסוק שיש לו הוכחה מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$, ואנו מסמנים ש-ϕ יכיח מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$ ב- $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}}\phi$.

ברור כי הוכחה ב-$\mathfrak{D}$ כפי שהוגדרה ב-ה' היא הוכחה מן הקבוצה הריקה $\emptyset$ ופסוק יכיח ב-$\mathfrak{D}$ הוא פסוק יכיח מ-$\emptyset$ ב-$\mathfrak{D}$.

12.3 כריעות מושג ההוכחה. במערכת היסק, קבוצת ההוכחות מקבוצת פסוקים Γ כריעה היא כריעה.

הוכחה. נתאר עתה את האלגוריתם לבדיקה אם מחרוזת ψ היא הוכחה כזאת. תחילה יש לפרק את ψ לסדרת ביטויים $\psi_1,\ldots,\psi_n$, ואז לטפל בכל ביטוי ψ_i בנפרד. תחילה בודקים אם ψ_i הוא פסוק בשפה L, ובזמנו ראינו שיש אלגוריתם העושה זאת. כעת נעשית הבדיקה אם ψ_i ממלא אחר אחד התנאים הנדרשים מן הרכיבים של הוכחה מ-Γ. מכיוון ש-Γ היא קבוצה כריעה אפשר להפעיל על ψ_i את האלגוריתם הבודק אם הוא נמצא ב-Γ, מכיוון שקבוצת האקסיומות הלוגיות של $\mathfrak{D}$ היא כריעה אפשר להפעיל על ψ_i את האלגוריתם הבודק אם הוא אקסיומה לוגית. מכיוון שיש ב-$\mathfrak{D}$ מספר סופי של כלל היסק וכולם יחסים כריעים, לכן אפשר, לכל כלל היסק k-מקומי R ולכל k-יה $j_1,\ldots,j_k<i$, להפעיל את אלגוריתם הבדיקה ליחס R על ה-$k+1$-יה $\psi_{j_1},\ldots,\psi_{j_k},\psi_i$. אם לכל $1\leq i\leq n$ אחת מהפעלות האלגוריתמים הללו נותנת תשובה חיובית אז ψ היא הוכחה, ואחרת היא אינה הוכחה.

12.4 הכריעות החיובית של קבוצת הפסוקים היכיחים. אם Γ היא קבוצת פסוקים כריעה, ובמיוחד כאשר Γ היא הקבוצה הריקה, אז קבוצת הפסוקים היכיחים ב-$\mathfrak{D}$ מ-Γ היא כריעה חיובית.

הוכחה. בהנתן הקבוצה Γ יהי R היחס כך ש- $R(\phi,\psi)$ אם ψ היא הוכחה של ϕ מ-Γ. היחס R הוא כריע כי לפי 12.3 יש אלגוריתם הבודק אם ψ היא הוכחה מ-G ב-$\mathfrak{D}$, ובמקרה של תשובה חיובית האלגוריתם ל-R בודק בנוסף אם הרכיב האחרון של ψ הוא ϕ. כעת, פסוק ϕ הוא יכיח מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$ אםם $\exists\psi R(\phi,\psi)$, ולכן קבוצת הפסוקים היכיחים מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$ היא כריעה חיובית.

12.5 הוכחה באינדוקציה על הוכחת משפט. תהי $\mathfrak{T}$ תכונה של פסוקים, Γ קבוצה של פסוקים ב-L' ו-$\mathfrak{D}$ מערכת היסק. אם כל אקסיומה לוגית של $\mathfrak{D}$ וכל איבר של Γ הוא בעל התכונה $\mathfrak{T}$, ואם לכל הפעלה של

כלל היסק r של $\mathfrak{D}$ אם כל ההנחות בהפעלה הן בעלות התכונה $\mathfrak{T}$ אז גם המסקנה בהפעלה היא בעלת התכונה $\mathfrak{T}$, אז כל משפט של Γ ב-$\mathfrak{D}$ הוא בעל התכונה $\mathfrak{T}$.

מושג ההוכחה במערכת היסק בא כדי לתת תאור פורמלי של מושג ההוכחה במתמטיקה. איך נראית הוכחה במתמטיקה מקבוצת פסוקים Γ, שאנו קוראים לה, בדרך כלל קבוצת האקסיומות של תורה מסויימת? (אילו אינן האקסיומות הלוגיות הנזכרות כאן). אנחנו יוצאים מקבוצת פסוקים זאת ומוכיחים, צעד אחר צעד, טענות מסויימות עד שאנו מגיעים למשפט אותו אנו רוצים להוכיח. בכל אחד משלבי ההוכחה אנו עוברים מטענות שכבר הוכחנו, ולכן אנו כבר יודעים שהן נכונות, לטענה חדשה. מה שנשמר לאורך כל ההוכחה הוא העובדה שטענות אלו הן אמיתיות, בהנחה שהאקסיומות ב-Γ אמיתיות, ובמילים אחרות שכל הטענות הללו נובעות מ-Γ, כלומר ש-Γ גוררת אותן. הדרישות שעלינו לדרוש כדי שנהיה בטוחים שכל הטענות המופיעות בהוכחה הן אמנם נובעות מ-Γ נידונות בהגדרה ובמשפט הבאים.

12.6 הגדרה. כלל היסק r של $\mathfrak{D}$ נקרא **נאות** לקבוצת הפסוקים Γ אם קיים

(1) אם הפסוק ψ מתקבל מן הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ ע"י r,
ואם $\Gamma\models\phi_i$ לכל $1\le i\le n$, אז גם $\Gamma\models\psi$

הערה. יש לשים לב לכך שהפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$ הנמצאים בשפה L' אינם בהכרח בשפה L. Γ היא קבוצת פסוקים של L, ולכן גם של L' שהיא העשרה של L המכילה את הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi$, ולכן הטענות $\Gamma\models\phi_i$ ו- $\Gamma\models\psi$ הן בעלות משמעות.

12.7 משפט הנאותות. תהי $\mathfrak{D}$ מערכת היסק ל-L ו-Γ קבוצת פסוקים ב-L'. אם כללי ההיסק של $\mathfrak{D}$ הם נאותים ל-Γ אז לכל פסוק ϕ ב-L', אם $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}}\phi$ אז $\Gamma\models\phi$.

הוכחה. באינדוקציה על ההוכחה של ϕ מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$. אם $\phi\in\Gamma$ אז ברור כי $\Gamma\models\phi$. אם ϕ אקסיומה לוגית של $\mathfrak{D}$ אז ϕ אמיתי לוגית ובוודאי קיים $\Gamma\models\phi$. יהיו $\phi_1,\ldots,\phi_n$ הנחות של כלל היסק r של $\mathfrak{D}$ ו-ψ מסקנה של r. אני מניחים, כהנחת האינדוקציה, כי $\Gamma\models\phi_1,\ldots,\phi_n$, ולפי (1) קיים גם $\Gamma\models\psi$. בכך הוכח המשפט.

ב-12.6 הגדרנו את הנאותות של כלל היסק לקבוצת פסוקים Γ. בהרבה מקרים נוכל להשתמש בתכונה יותר פשוטה של כלל ההיסק שאינה מתייחסת לקבוצת פסוקים Γ מסויימת. כזאת היא **תכונת הגרירה** והיא שהנחות כלל ההיסק יגררו את מסקנת כלל ההיסק, כלומר שאם קיים $r(\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi)$ אז $\phi_1,\ldots,\phi_n\models\psi$. לדוגמה, כלל היסק המקיים את דרישת הגרירה הוא כלל הניתוק כי קיים תמיד $\phi,\phi\to\psi\models\psi$. אם כלל היסק r מקיים את תנאי הגרירה אז הוא נאות לכל קבוצת פסוקים Γ, כפי שנראה עתה. אם $r(\phi_1,\ldots,\phi_n,\psi)$ וקיים $\Gamma\models\phi_1,\ldots,\phi_n$ אז, מכיוון ש-r מקיים את תנאי הגרירה קיים $\phi_1,\ldots,\phi_n\models\psi$. מכיוון שהגרירה טרנזיטיבית קיים גם $\Gamma\models\psi$.

נראה עתה כי ישנם גם כללי היסק שאינם מקיימים את תנאי הגרירה ובכל זאת הם כנדרש במשפט הנאותות. נתבונן בכלל ההיסק $\frac{\mathsf{R(c)}}{\forall\mathsf{xR(x)}}$, היכן ש-$\mathsf{R}$ קבוע יחס חד-מקומי של L ו-c קבוע אישי שאינו מופיע בפסוקי Γ, ונוכיח שלמרות שהוא אינו מקיים את דרישת הגרירה הוא מקיים את הדרישה של משפט הנאותות. מצד אחד ברור שהנחת הכלל $\mathsf{R(c)}$ אינה גוררת את מסקנתו $\forall\mathsf{xR(x)}$, כי במבנה $\mathcal{A}$ בו $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(\mathsf{c}^{\mathcal{A}})=T$ וגם קיים בו איבר a כך ש-$\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a)=F$ הפסוק $\mathsf{R(c)}$ אמיתי בעוד הפסוק $\forall\mathsf{xR(x)}$ אינו אמיתי. מצד שני נראה עתה כי כלל זה הוא נאות. נתון לנו, אם כן, כי $\Gamma\models\mathsf{R(c)}$ ועלינו להוכיח כי $\Gamma\models\forall\mathsf{xR(x)}$. הרעיון הבסיסי של ההוכחה הוא שאם $\Gamma\models\mathsf{R(c)}$ מבלי שיש לפסוקי Γ מידע כלשהו על הערך של הקבוע c אז במודלים של Γ R אמיתי לכל איבר של המבנה ולכן $\Gamma\models\forall\mathsf{xR(x)}$. הביצוע הפורמלי של רעיון זה הוא כדלקמן. די לנו להראות כי לכל מודל $\mathcal{A}$ של Γ בשפה של Γ קיים $\mathcal{A}\models\forall\mathsf{xR(x)}$. לכל $a\in A$ תהי $\mathcal{A}_a$ ההעשרה של $\mathcal{A}$ ל-c הנתונה ע"י $\mathsf{c}^{\mathcal{A}_a}=a$. מכיוון שפסוקי Γ אמיתיים ב-$\mathcal{A}$ הם גם אמיתיים ב-$\mathcal{A}_a$ (לפי 8.31), ומכיוון ש- $\Gamma\models\mathsf{R(c)}$ קיים $\mathcal{A}_a\models\mathsf{R(c)}$.

לפי הגדרת האמת קיים $\qquad T=\mathsf{R}^{\mathcal{A}_a}(\mathsf{c}^{\mathcal{A}_a})$
ומכיוון ש- $\mathsf{R}^{\mathcal{A}_a}=\mathsf{R}^{\mathcal{A}}$ ו- $\mathsf{c}^{\mathcal{A}_a}=a$ לכן $\qquad =\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a)$

מכיוון ש-a הוא איבר כלשהו של A ראינו כי לכל $a\in A$ $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a)=T$ ולכן $\mathcal{A}\models\forall\mathsf{xR(x)}$.

12.8 תרגיל. הוכח כי הנוסחה $\phi_1\to(\phi_2\to(\ldots\to(\phi_n\to\psi)\ldots)$ שקולה טאוטולוגית לנוסחה

$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \to \psi$.

12.9 למה. אם הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ גוררים טאוטולוגית את ψ אז $\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots \to (\phi_n \to \psi)\ldots)$ הוא טאוטולוגיה.

הוכחה. אם הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ גוררים טאוטולוגית את ψ אז, לפי הגדרת הגרירה הטאוטולוגית, קיימים פסוקים $\phi_1',\ldots,\phi_n',\psi'$ של תחשיב הפסוקים ופסוקים $\chi_1,\ldots,\chi_m$ של תחשיב היחסים כך ש- $\phi_1',\ldots,\phi_n'$ גוררים את ψ' בתחשיב הפסוקים, לכל $1 \le i \le n$ $\mathrm{sub}(\phi_i', \vec{P}, \vec{\chi}) = \phi_i$, ו- $\mathrm{sub}(\psi', \vec{P}, \vec{\chi}) = \psi$. לפי 3.57ג' בספר $\phi_1' \wedge \ldots \wedge \phi_n' \to \psi'$ היא טאוטולוגיה וכן הפסוק $\phi_1' \to (\phi_2' \to \ldots \to (\phi_n' \to \psi')\ldots)$, השקול לו. לפי הגדרת ההצבה, הצבת $\vec{\chi}$ עבור $\vec{P}$ בפסוק זה נותנת את הפסוק $\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots \to (\phi_n \to \psi)\ldots)$, שהוא, לכן, טאוטולוגיה של תחשיב היחסים.

12.10 למה. אם כל אחת מ- $\vec{\chi_1},\ldots,\vec{\chi_k}$ היא הוכחה מ-Γ אז גם צרופן לסדרת פסוקים אחת היא הוכחה מ-Γ.

12.11 משפט. תהי $\mathfrak{D}$ מערכת היסק המכילה את כלל הניתוק, ושכל טאוטולוגיה יכיחה בה. אם הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ גוררים טאוטולוגית את ψ ו- $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \phi_1,\ldots,\phi_n$ אז $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \psi$.

הוכחה. מכיוון שלפי הנתון הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ גוררים טאוטולוגית את ψ לכן, לפי 12.9, הפסוק $\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots \to (\phi_n \to \psi)\ldots)$ הוא טאוטולוגיה של תחשיב היחסים, ולכן, לפי הנחתנו על $\mathfrak{D}$, הוא יכיח ב-$\mathfrak{D}$. נצרף לסדרה אחת את ההוכחות מ-Γ של ϕ_1 עד ϕ_n ואת ההוכחה של $\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots \to (\phi_n \to \psi)\ldots)$. סדרה זאת היא הוכחה מ-$\Gamma$ לפי 12.10. סדרה זאת מכילה, כמובן, גם את הפסוקים $\phi_1,\ldots,\phi_n$ עצמם. נוסיף כעת לסוף הסדרה את n הפסוקים המתקבלים מ- $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$ ע"י הפעלת כלל הניתוק עם כל אחד מן הפסוקים $\psi_1,\ldots,\psi_n$, כלומר את הפסוקים $\psi_2 \to (\psi_3 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$, $\psi_3 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$, ..., $\psi_n \to \phi$, ϕ. כל אחד מן הפסוקים שהוספנו ממלא אחר הדרישה מפסוקי הוכחה ב-Δ מ-Γ כי הוא מתקבל משני פסוקים קודמים בסדרה ע"י כלל הניתוק. לכן סדרת הפסוקים שקבלנו היא הוכחה של ϕ מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$.

12.12 הגדרה. המטרה שלנו בשימוש במערכת היסק היא לצאת מקבוצת פסוקים Γ ולהוכיח ממנה את כל הפסוקים ש-Γ גוררת. הדבר החשוב ביותר הוא ש-$\mathfrak{D}$ לא תכשיל אותנו, כלומר שלא יקרה שהוכחנו פסוק מ-Γ והפסוק בכלל לא נובע מ-Γ (אנו אומרים כי ϕ נובע מ-Γ אם $\Gamma \models \phi$), וזהו התוכן של משפט הנאותות, אולם זה לבד אינו מספיק ואנו מצפים שכל פסוק הנובע מ-Γ יהיה יכיח מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$. לכן נגדיר ש-$\mathfrak{D}$ היא **מערכת היסק שלמה** אם לכל קבוצת פסוקים Γ ולכל פסוק ϕ, אם $\Gamma \models \phi$ אז $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \phi$.

12.13 הגדרה. מערכת היסק $\mathfrak{D}$ נקראת שלמה במובן החלש אם כל פסוק אמיתי לוגית יכיח ב-$\mathfrak{D}$. מושג זה מתקבל כאשר בהגדרת השלמות של מערכת היסק ב-12.12 אנו מגבילים את הדרישה למקרה בו Γ היא הקבוצה הריקה בלבד.

12.14 משפט. למערכת היסק $\mathfrak{D}$ המכילה את כלל הניתוק התנאים א' ו-ב' הבאים גוררים מיידית זה את זה.

א. $\mathfrak{D}$ היא מערכת היסק שלמה.

ב. קיים משפט הקומפקטיות ו-$\mathfrak{D}$ היא שלמה במובן החלש.

הוכחה. אם $\mathfrak{D}$ היא שלמה אז, כפי שכבר הזכרנו, תנאי השלמות עם $\Gamma = \emptyset$ הוא תנאי השלמות במובן החלש, ולכן $\mathfrak{D}$ היא שלמה במובן החלש. כעת נוכיח משלמות $\mathfrak{D}$ את משפט הקומפקטיות. יהי $\Gamma \models \phi$ ועלינו להוכיח שקיימת תת קבוצה סופית Δ של Γ כך ש- $\Delta \models \phi$. מכיוון ש-$\mathfrak{D}$ שלמה, קיים $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \phi$. תהי נתונה הוכחה מסויימת של ϕ מ-Γ ב-$\mathfrak{D}$. בהוכחה זאת מופיע רק מספר סופי של פסוקים של Γ. תהי Δ קבוצת פסוקי Γ המופיעים בהוכחה זאת. לפי הגדרת מושג ההוכחה, אותה הוכחה היא גם הוכחה מ-Δ ב-$\mathfrak{D}$ ולכן $\Delta \vdash_{\mathfrak{D}} \phi$. לפי משפט הנאותות 12.7 קיים $\Delta \models \phi$, ובכך הוכח משפט הקומפקטיות.

בכוון השני נניח ש-$\mathfrak{D}$ שלמה במובן החלש. נוכיח ש-$\mathfrak{D}$ שלמה ע"י שנניח שעבור קבוצת פסוקים Γ ופסוק ϕ קיים $\Gamma \models \phi$ ונוכיח כי $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \phi$. מכיוון ש- $\Gamma \models \phi$ קיימת, לפי משפט הקומפקטיות, תת-קבוצה Δ סופית של Γ כך ש- $\Delta \models \phi$. תהי $\Delta = \{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$. קיים לכן $\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \models \phi$, ולכן $\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \phi$ הוא פסוק

אמיתי לוגית. פסוק זה שקול טאוטולוגית לפסוק $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$ שלכן גם הוא אמיתי לוגית. מכיוון ש-$\mathfrak{D}$ שלמה במובן החלש קיים $\vdash_{\mathfrak{D}} \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$. אם נצא מהוכחה של $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$, נוסיף לה את $\psi_1, \ldots, \psi_n$ שהם פסוקים מתוך Γ, ובהמשך נפעיל על הפסוק $\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi)\ldots)$ n פעמים את כלל הניתוק נקבל הוכחה של ϕ מ-Γ, ולכן $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}} \phi$.

בהמשך נביא מערכת היסק מסויימת ונוכיח שהיא שלמה. נדון עתה במשמעות של קיום מערכת היסק כזאת. קיום מערכת היסק כזאת, ואפילו אם היא רק שלמה במובן החלש, הוא **משפט השלמות של גדל**. ראינו לעיל כי קבוצת הפסוקים היכיחים ב-$\mathfrak{D}$ היא כריעה חיובית. לכן כאשר נוכיח שמערכת היסק מסויימת היא שלמה נוכיח בכך גם שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית היא כריעה חיובית, וזאת תהיה הוכחה לכך השונה מן ההוכחה שהבאנו קודם. בהוכחה זאת יחס העדות הוא יחס יותר אינטואיטיבי מזה שראינו בהוכחה הקודמת, כי כאן העד לכך שפסוק הוא אמיתי לוגית הוא הוכחה של הפסוק ב-$\mathfrak{D}$.

קיום מערכת היסק שלמה מטיל אור מעניין על **משפט אי השלמות של גדל**. נראה כיצד אפשר להתמודד עם המשימה של מציאת כל הפסוקים האמיתיים במבנה המספרים הטבעיים $\mathfrak{N}^+$ באמצעות הכלי של ההוכחות. מערכת ההיסק החזקה ביותר שאנו יכולים לצפות לה בתחשיב היחסים מסדר ראשון היא מערכת שלמה, כי במערכת שלמה אנו יכולים להוכיח מקבוצת פסוקים Γ את כל הפסוקים הנובעים ממנה, ולכן במערכת חזקה יותר נוכל להוכיח מקבוצת פסוקים Γ גם פסוק שאיננו נובע ממנה, וזה סותר את משפט הנאותות. בכל מערכת היסק, ובכלל זה במערכת היסק שלמה, אם נצא מקבוצת אקסיומות כריעה לתורת המספרים, שכולן כמובן אמיתיות ב-$\mathfrak{N}^+$, אז, לפי משפט הנאותות 12.7, קבוצת הפסוקים היכיחים מ-Γ היא תת קבוצה של הקבוצה $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^+)$, שהיא קבוצת הפסוקים האמיתיים ב-$\mathfrak{N}^+$, ולפי 12.4 קבוצת הפסוקים היכיחים מ-Γ היא כריעה חיובית, בעוד ש- $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^+)$ אינה כריעה חיובית. לכן קבוצת הפסוקים היכיחים מ-Γ היא קבוצה חלקית ממש של $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^+)$, כלומר ישנם פסוקים שהם אמיתיים ב-$\mathfrak{N}^+$ ואינם יכיחים מ-Γ. זה אומר שלא בלבד שמאקסיומות פיאנו P1–P7 אי אפשר להוכיח את כל הפסוקים האמיתיים במבנה המספרים הטבעיים אלא אף אם נרחיב את אקסיומות פיאנו לקבוצה כריעה כלשהיא של פסוקים אי אפשר יהיה להוכיח מהם את כל הפסוקים האמיתיים במבנה המספרים הטבעיים. כמובן שאפשר לבחור קבוצת אקסיומות Γ לא כריעה שממנה אפשר להוכיח את כל הפסוקים האמיתיים במבנה המספרים הטבעיים כגון $\Gamma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}^+)$, אבל בחירה כזאת היא חסרת טעם כי השאלה איתה אנו מתמודדים היא אילו הם הפסוקים האמיתיים במבנה המספרים הטבעיים, ובחירה כזאת של האקסיומות אינה עונה על שאלה זאת אלא היא זורקת אותה על האקסיומות, כי בבחירה זאת לא נדע אם פסוק נתון הוא אקסיומה או לא.

נציג עתה מערכת היסק מסויימת ונוכיח שהיא שלמה.

12.15 מערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$.

האקסיומות הלוגיות: אקסיומות הקשרים: הטאוטולוגיות של תחשיב היחסים.

אקסיומות הכמתים: באקסיומות אלו ϕ היא נוסחה עם משתנה חופשי יחיד שאנו מסמנים אותו ב-x, ו-t הוא שם עצם קבוע, כלומר שם עצם ללא משתנים.

מן הכלל אל הפרט $\forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \phi(t)$

מן הפרט אל הקיום $\phi(t) \to \exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$

אקסיומות השיוויון: $\forall \mathsf{x}(\mathsf{x} \approx \mathsf{x}), \quad \forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \to \mathsf{y} \approx \mathsf{x}), \quad \forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}\forall \mathsf{z}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} \approx \mathsf{z} \to \mathsf{x} \approx \mathsf{z})$

לכל שם עצם t עם משתנה חופשי x יחיד, $\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \to t(\mathsf{x}) \approx t(\mathsf{y}))$

לכל נוסחה ϕ עם משתנה חופשי x יחיד ולכל משתנה y הכשר להצבה עבור x ב-$\phi(\mathsf{x})$

$\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \to (\phi(\mathsf{x}) \leftrightarrow \phi(\mathsf{y})))$

כללי היסק: כלל פסוקי: **כלל הניתוק** $\dfrac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$

כללי הכמתים:

בשני כללים אלו c הוא קבוע אישי שאינו מופיע בפסוקי Γ ואינו מופיע ב-ψ וב-$\phi(\mathsf{x})$.

כלל ההכללה

$$\frac{\psi \rightarrow \phi(\mathsf{c})}{\psi \rightarrow \forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})}$$

כלל הקיום

$$\frac{\phi(\mathsf{c}) \rightarrow \psi}{\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \psi}$$

כדי שהמערכת הזאת תיחשב למערכת היסק עלינו להוכיח שהאקסיומות הלוגיות שלה הם פסוקים אמיתיים לוגית ושכללי ההיסק שלה הם נאותים לכל קבוצת פסוקים Γ, ונראה זאת עתה.

א. לפי משפט 9.6 בספר כל טאוטולוגיה של תחשיב היחסים היא נוסחה אמיתית לוגית.

ב. נשאיר לקורא להוכיח שכל פסוק $\forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \phi(t)$ הוא אמיתי לוגית. הוכחה זאת דומה מאוד להוכחה שנביא עתה שכל פסוק $\phi(t) \rightarrow \exists\phi(\mathsf{x})$ הוא אמיתי לוגית. נניח כי $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi(t)$ ונוכיח כי $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$. לפי המשפט הסמנטי של ההצבה למשתנים חופשיים, 9.22,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(t)) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{x}))[\boldsymbol{\mathcal{A}}(t)] \tag{2}$$

מכיוון שלפי הנחתנו ערכו של אגף שמאל של (2) הוא T לכן זהו גם ערכו של אגף ימין של (2) הוא T, כלומר $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{x}))[a] = T$ עבור $a = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)$, ולכן $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})) = \max_{a\in A} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(x)) = T$

ג. ראינו לעיל שכלל הניתוק מקיים את תנאי הגרירה ולכן הוא נאות.

ד. נוכיח עתה כי כלל ההכללה הוא נאות ל-Γ, והוכחת נאותות כלל הקיום ל-Γ היא דומה. הרעיון וההוכחה דומים להוכחה לעיל של נאותות כלל ההיסק $\frac{\mathsf{R}(\mathsf{c})}{\forall \mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x})}$. נתון כי $\Gamma \models \phi \rightarrow \psi(\mathsf{c})$ ועלינו להוכיח כי $\Gamma \models \phi \rightarrow \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$, מה שעלינו להוכיח הוא שלכל מודל $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ של Γ לשפה המכילה גם את הקבועים של $\phi \rightarrow \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$ קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi \rightarrow \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$. ל-$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ כזה, אם ϕ אינו אמיתי ב-$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ אז בוודאי $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi \rightarrow \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$. לכן נטפל עתה במקרה בו $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi$. יהי a איבר כלשהו של A, ויהי $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a$ מבנה שהוא בדיוק כמו $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ פרט לכך ששפתו מכילה גם את c ו- $\mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}_a} = a$. מכיוון ש- $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \Gamma, \phi$ לכן גם $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a \models \Gamma, \phi$. מכיוון ש- $\Gamma \models \phi \rightarrow \psi(\mathsf{c})$ והפסוק $\phi \rightarrow \psi(\mathsf{c})$ הוא בשפת $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a$ קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a \models \psi(\mathsf{c})$. לפי משפט ההצבה קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a \models \psi(\mathsf{x})[\mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}_a}]$, ומכיוון ש- $\mathsf{c}^{\boldsymbol{\mathcal{A}}_a} = a$ קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}}_a \models \psi(\mathsf{x})[a]$. מכיוון שהנוסחה $\psi(\mathsf{x})$ אינה מכילה את הקבוע c קיים גם $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \psi(\mathsf{x})[a]$, ומכיוון שזה נכון לכל איבר a של A קיים $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$ ולכן $\boldsymbol{\mathcal{A}} \models \phi \rightarrow \forall \mathsf{x}\psi(\mathsf{x})$.

ה. הוכחת האמיתיות הלוגית של אקסיומות השיוויון $\forall \mathsf{x}(\mathsf{x} \approx \mathsf{x})$, $\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \rightarrow \mathsf{y} \approx \mathsf{x})$, $\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}\forall \mathsf{z}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \wedge \mathsf{y} \approx \mathsf{z} \rightarrow \mathsf{x} \approx \mathsf{z})$ היא מיידית. הוכחת האמיתיות הלוגית של $\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \rightarrow t(\mathsf{x}) \approx t(\mathsf{y}))$ דומה מאד להוכחה שנוכיח עתה שלכל נוסחה ϕ עם המשתנה החופשי היחיד x ולכל משתנה y הכשר להצבה עבור x ב-$\phi(\mathsf{x})$ הפסוק $\forall \mathsf{x}\forall \mathsf{y}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \rightarrow (\phi(\mathsf{x}) \leftrightarrow \phi(\mathsf{y})))$ אמיתי לוגית. לפי הגדרת האמת פסוק זה אמיתי לוגית אםם לכל מבנה מספיק $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ולכל $a, b \in A$ קיים

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y} \rightarrow (\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \phi(\mathsf{y})))[a, b] = T \tag{5}$$

אם $a \neq b$ אז מכך ש- $\approx^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ הוא יחס הזהות נובע כי $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathsf{x} \approx \mathsf{y})[a, b] = F$ ולכן קיים (5). אם $a = b$ אז, לפי משפט ההצבה, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{y}))[a, b] = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{x})[b, b])$, ומכיוון ש- $b = a$ זה שווה ל- $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{x}))[a, b]$, ולכן $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi(\mathsf{x}) \rightarrow \phi(\mathsf{y}))[a, b] = T$ ו-(5) קיים.

כדי לפשט את הכתיבה נכתוב בהמשך $\Gamma, \phi_1, \ldots, \phi_n$ במקום $\Gamma \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ ולכן גם נכתוב $\phi_1, \ldots, \phi_n$ במקום $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$.

נביא עתה שתי דוגמאות להוכחות ב-$\mathfrak{D}_0$. בדוגמאות אלו נכתוב את פסוקי ההוכחה בזה אחר זה יחד עם ההסברים למקומם של הפסוקים בהוכחה.

הדוגמה הראשונה היא הוכחה ב-$\mathfrak{D}_0$ של $\exists \mathsf{x}\mathsf{S}(\mathsf{x})$ משני הפסוקים $\exists \mathsf{x}\mathsf{R}(\mathsf{x})$ ו- $\forall \mathsf{x}(\mathsf{R}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{S}(\mathsf{x}))$.

(i) פסוק נתון $\forall \mathsf{x}(\mathsf{R}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{S}(\mathsf{x}))$

(ii) אקסיומה לוגית, מן הכלל אל הפרט $\forall \mathsf{x}(\mathsf{R}(\mathsf{x}) \rightarrow \mathsf{S}(\mathsf{x})) \rightarrow (\mathsf{R}(\mathsf{c}) \rightarrow \mathsf{S}(\mathsf{c}))$

(iii) מ-(i) ו-(ii) ע"י כלל הניתוק $R(c) \to S(c)$
(iv) אקסיומה לוגית, מו הפרט אל הקיום $S(c) \to \exists x S(x)$
(v) אקסיומה לוגית, טאוטולוגיה $(R(c) \to S(c)) \to ((S(c) \to \exists x S(x)) \to (R(c) \to \exists x S(x)))$
(vi) מ-(iii) ו-(v) ע"י כלל הניתוק $(S(c) \to \exists x S(x)) \to (R(c)) \to \exists x S(x))$
(vii) מ-(iv) ו-(vi) ע"י כלל הניתוק $R(c) \to \exists x S(x)$
(viii) מ-(vii) ע"י כלל הקיום $\exists x R(x) \to \exists x S(x)$
(ix) פסוק נתון $\exists x R(x)$
(x) מ-(ix) ו-(viii) ע"י כלל הניתוק $\exists x S(x)$

הדוגמה השניה היא הוכחה ב-$\mathfrak{D}_0$ של $\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y)$.
(i) אקסיומה לוגית, מן הכלל אל הפרט $\forall x R(x,d) \to R(c,d)$
(ii) אקסיומה לוגית, מן הפרט אל הקיום $R(c,d) \to \exists y R(c,y)$
(iii) אקסיומה לוגית, טאוטולוגיה
$(\forall x R(x,d) \to R(c,d)) \to ((R(c,d) \to \exists y R(c,y)) \to (\forall x R(x,d) \to \exists y R(c,y)))$
(iv) מ-(i) ו-(iii) ע"י כלל הניתוק $(R(c,d) \to \exists y R(c,y)) \to (\forall x R(x,d) \to \exists y R(c,y))$
(v) מ-(ii) ו-(iv) ע"י כלל הניתוק $\forall x R(x,d) \to \exists y R(c,y)$
(vi) מ-(v) ע"י כלל הקיום $\exists y \forall x R(x,y) \to \exists y R(c,y)$
(vii) מ-(vi) ע"י כלל ההכללה $\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y)$

12.16 תרגיל. מצא הוכחה של $\neg\exists x \phi(x) \to \forall x \neg\phi(x)$ ב-$\mathfrak{D}_0$.
רמז התחל ב- $\phi(c) \to \exists x \phi(x)$.

12.17 כללי היסק נגזרים. אחת הבעיות עם מערכות היסק בכלל, ועם המערכת $\mathfrak{D}_0$ בפרט היא שהוכחות בהן, אפילו של משפטים פשוטים, הן ארוכות ומסובכות. כדי להקל על השימוש במערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ נביא כאן מספר כללי היסק נגזרים. כלל היסק נגזר מאפשר לנו לעבור בהוכחה מפסוקים מסויימים $\phi_1, \ldots, \phi_n$ לפסוק ψ למרות שאין ב-$\mathfrak{D}_0$ כלל המתיר זאת, כאשר אנו יודעים שב-$\mathfrak{D}_0$ אפשר לעשות את המעבר הזה בהוכחה במספר צעדים. כך מה שמתקבל כאשר אנו משתמשים בכללי היסק נגזרים אינו הוכחה אלא שלד של הוכחה שאפשר להשלים אותו להוכחה ע"י הוספת פסוקים. לכן כאשר אנו מכריזים על כלל ככלל היסק נגזר עלינו ללוות הכרזה זאת בהוכחה שבכל שימוש בכלל זה אפשר להוסיף לפני הפסוק המתקבל מספר פסוקים כך שהפסוק המתקבל עם הפסוקים הנוספים לפניו יקיימו את הדרישות מפסוקים בהוכחה. למשל, לאור 12.11 אנו יכולים להכריז על הכלל הבא ככלל היסק נגזר של $\mathfrak{D}_0$.

כלל הגרירה הטאוטולוגית. כאשר הפסוקים $\phi_1, \ldots, \phi_n$ גוררים טאוטולוגית את הפסוק ψ. $\dfrac{\phi_1, \ldots, \phi_n}{\psi}$
כלל הניתוק הוא מקרה פרטי של כלל זה.

נראה כיצד נראית הדוגמה השניה של הוכחה שראינו לעיל אם משתמשים בה בכלל היסק נגזר זה.
(i) אקסיומה לוגית, מן הכלל אל הפרט $\forall x R(x,d) \to R(c,d)$
(ii) אקסיומה לוגית, מן הפרט אל הקיום $R(c,d) \to \exists y R(c,y)$
(v) מ-(i) ו-(ii) ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית $\forall x R(x,d) \to \exists y R(c,y)$
(vi) מ-(v) ע"י כלל הקיום $\exists y \forall x R(x,y) \to \exists y R(c,y)$
(vii) מ-(vi) ע"י כלל ההכללה $\exists y \forall x R(x,y) \to \forall x \exists y R(x,y)$ הסדרה של
חמשת הפסוקים הללו אינה הוכחה, אבל כאשר אנו רואים אותה ברור לנו שניתן להשלים אותה להוכחה ע"י הוספת פסוקים לפני הפסוק בט נעשה שימוש בכלל היסק נגזר, ובמקרה הנוכחי מתקבלת הוכחה ע"י הוספת שני הפסוקים (iii) ו-(iv) מן הדוגמה לעיל לפני (v).

נוסיף עתה עוד מספר כללי היסק נגזרים.

12.18 כלל ההכללה הפשוט אם הקבוע האישי c אינו מופיע ב-$\phi(x)$ ובפסוקי הקבוצה Γ ממנה אנו מוכיחים $\dfrac{\phi(c)}{\forall x \phi(x)}$

הוכחה תהי τ טאוטולוגיה כלשהי שהיא פסוק ושאינה מכילה את c. כדי לקבל מ-$\phi(c)$ את $\forall x \phi(x)$ אנו

מוסיפים אחרי $\phi(\mathsf{c})$ את הפסוקים הבאים.

(i) מ-$\phi(\mathsf{c})$ ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית $\tau \to \phi(\mathsf{c})$

(ii) מ-(i) ע"י כלל ההכללה $\tau \to \forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$

(iii) מ-(ii) ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית $\forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$

כללי היסק נגזרים נוספים הם הבאים, ותקפותם תוכח ב-12.19.

כלל שלילת הקיום. אם הקבוע האישי c אינו מופיע ב-$\phi(\mathsf{x})$ ובפסוקי הקבוצה Γ ממנה אנו מוכיחים

$$\frac{\neg\phi(\mathsf{c})}{\neg\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})}$$

כלל מן הכלל אל הפרט. לשם עצם קבוע t

$$\frac{\forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})}{\phi(t)}$$

כלל מן הפרט אל הקיום. לשם עצם קבוע t

$$\frac{\phi(t)}{\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x})}$$

12.19 תרגיל. הוכח את התקפות של הכללים הנגזרים: א. כלל שלילת הקיום, ב. כלל מן הכלל אל הפרט, ג. כלל מן הפרט אל הקיום.

רמז: א. להתחיל במעבר מ- $\neg\phi(\mathsf{x})$ ל- $\phi(\mathsf{x}) \to \sigma$, כאשר σ סתירה טאוטולוגית.

כעת ניגש להוכחת שלמות מערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$, ולשם כך אנו זקוקים למשפט הבא.

12.20 משפט ההיסק. אם לפסוק χ קיים $\Gamma, \chi \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$ אז $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \chi \to \phi$.

הכוון ההפוך, שאם $\Gamma \vdash_{\mathfrak{D}_0} \chi \to \phi$ אז $\Gamma, \chi \vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$ הוא טריביאלי, כי אז הפסוקים χ ו- $\chi \to \phi$ יכיחים מ-Γ, χ ולכן, לפי כלל הגרירה הטאוטולוגית, גם הפסוק ϕ יכיח מ-Γ, χ.

הוכחה. באינדוקציה על הוכחת ϕ מ- Γ, χ.

א. $\phi \in \Gamma$ או ש-f הוא אקסיומה לוגית. $\phi \to (\chi \to \phi)$ הוא טאוטולוגיה, ולכן יכיח מ-Γ. גם ϕ יכיח מ-Γ והפעלת כלל הניתוק על פסוקים אלו נותנת את $\chi \to \phi$.

ב. $\chi = \phi$. אז $\chi \to \phi$ הוא $\phi \to \phi$ וזהו טאוטולוגיה ולכן הוא יכיח.

ג. ϕ מתקבל מ-ψ ומ-$\psi \to \phi$ ע"י כלל הניתוק. לפי הנחת האינדוקציה $\chi \to \psi$ ו- $\chi \to (\psi \to \phi)$ יכיחים מ-Γ. שני פסוקים אלו גוררים טאוטולוגית את $\chi \to \phi$ ולכן $\chi \to \phi$ יכיח מ-Γ. הפסוק $(\chi \to (\psi \to \phi)) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \phi))$ הוא טאוטולוגיה ולכן יכיח מ-Γ.

ד. ϕ הוא $\psi \to \forall \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$, ובהוכחה מ- Γ, χ הוא מתקבל מן הפסוק $\psi \to \rho(\mathsf{c})$ ע"י שימוש בכלל ההכללה, היכן ש-c אינו מופיע ב-ψ או ב-$\rho(\mathsf{x})$ או בפסוקי Γ, χ. לפי הנחת האינדוקציה הפסוק $\chi \to (\psi \to \rho(\mathsf{c}))$ יכיח מ-Γ. פסוק זה גורר טאוטולוגית את הפסוק $\chi \wedge \psi \to \rho(\mathsf{c})$, ולכן גם פסוק זה יכיח מ-Γ. c אינו מופיע ב-ψ וב-χ ולכן הוא אינו מופיע ב- $\chi \wedge \psi$. לכן כלל ההכללה נותן את הפסוק $\chi \wedge \psi \to \forall \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$. פסוק זה שקול טאוטולוגית לפסוק $\chi \to (\psi \to \forall \mathsf{x}\rho(\mathsf{x}))$, שהוא הפסוק $\chi \to \phi$, ולכן גם $\chi \to \phi$ יכיח.

ה. ϕ הוא $\exists \mathsf{x}\rho(\mathsf{x}) \to \psi$ והוא מתקבל ע"י כלל הקיום מ- $\rho(\mathsf{c}) \to \psi$, היכן ש-c אינו מופיע ב-$\psi$. ההוכחה במקרה זה דומה להוכחה במקרה ד'.

12.21 תרגיל. א. הוכח כי $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \forall \mathsf{x}(\phi(\mathsf{x}) \to \psi) \to (\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \psi)$, כאשר x אינו חופשי ב-$\psi$.

רמז: הוכח כי $\forall \mathsf{x}(\phi(\mathsf{x}) \to \psi) \vdash_{\mathfrak{D}_0} \exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \psi$ והשתמש במשפט ההיסק.

ב. הוכח כי $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \forall \mathsf{x}(\phi(\mathsf{x}) \to \psi) \leftrightarrow (\exists \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \to \psi)$, כאשר x אינו חופשי ב-$\psi$.

ג. הוכח כי $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \forall \mathsf{x}(\psi \to \phi(\mathsf{x})) \leftrightarrow (\psi \to \forall \mathsf{x}\phi(\mathsf{x}))$, כאשר x אינו חופשי ב-$\psi$.

12.22. מכיוון שמשפט הקומפקטיות כבר ידוע לנו לכן, לאור 12.14, די לנו להוכיח כי $\mathfrak{D}_0$ שלמה במובן החלש. לטובת אותם קוראים המעדיפים להוכיח את שלמות $\mathfrak{D}_0$ מבלי להשתמש במשפט הקומפקטיות, נראה מאוחר יותר כיצד אפשר לעשות זאת ע"י שינוי לא גדול של הוכחת השלמות במובן החלש. עלינו אם כן להוכיח שאם ϕ פסוק אמיתי לוגית אז הוא יכיח ב-$\mathfrak{D}_0$. תהי σ סתירה טאוטולוגית כלשהי, למשל $\psi \wedge \not\psi$. לפי משפט ההיסק אם $\neg\phi \vdash_{\mathfrak{D}_0} \sigma$ אז $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \neg\phi \to \sigma$ ומכיוון ש- $\neg\phi \to \sigma$ שקול טאוטולוגית ל-ϕ לכן, בשימוש בכלל הגרירה הטאוטולוגית, $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$. לכן כדי להוכיח את השלמות החלשה של $\mathfrak{D}_0$ די לנו להוכיח כי אם $\models \phi$ אז $\neg\phi \vdash_{\mathfrak{D}_0} \sigma$, ונעשה עתה את הצעדים הדרושים לכך.

12.23 הגדרה. קבוצת פסוקים נקראת **קונסיסטנטית** במערכת היסק $\mathfrak{D}$ אם אף סתירה טאוטולוגית σ אינה יכיחה ממנה ב-$\mathfrak{D}$.

נעיר כי אם Γ אינה קונסיסטנטית, אז כל פסוק ϕ, ובפרט כל סתירה טאוטולוגית, יכיח מ-Γ, כי מכיוון ש-$\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$ ו-σ גורר טאוטולוגית את ϕ אז לפי כלל הגרירה הטאוטולוגית $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi$.

המונח האנגלי consistent משמש על פי רוב למה שאנו קראנו "עקבי", ויש לשים לב שאנו משתמשים כאן במונח "קונסיסטנטי" למשהו שונה.

12.24 למת ההוספה. א. אם קבוצת פסוקים Γ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$ ו- $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi$ אז גם Γ,ϕ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

ב. אם Γ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$ ו- $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi\vee\psi$ אז גם לפחות אחת הקבוצות Γ,ϕ ו- Γ,ψ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

ג. אם Γ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$, $\exists\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})\in\Gamma$ ו-c הוא קבוע אישי שאינו מופיע בפסוקי Γ אז גם $\Gamma,\phi(\mathsf{c})$ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

ד. אם Γ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$, $\neg\forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})\in\Gamma$ ו-c הוא קבוע אישי שאינו מופיע בפסוקי Γ אז גם $\Gamma,\neg\phi(\mathsf{c})$ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$.

הוכחה. א. אילו היה $\Gamma,\phi\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$, כאשר σ סתירה טאוטולוגית, אז לפי משפט ההיסק $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi\rightarrow\sigma$, ומכיוון ש-$\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi$ ו-ϕ ו- $\phi\rightarrow\sigma$ גוררים טאוטולוגית את σ אז, ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית, $G\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$, בניגוד להנחתנו ש-$\Gamma$ קונסיסטנטית.

ב. אילו היה $\Gamma,\phi\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$ ו- $\Gamma,\psi\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$ אז,לפי משפט ההיסק, $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi\rightarrow\sigma$ ו- $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\psi\rightarrow\sigma$, ומכיוון ש-$\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi\vee\psi$ ו-$\phi\vee\psi$, $\phi\rightarrow\sigma$ ו- $\psi\rightarrow\sigma$ גוררים טאוטולוגית את σ אז, ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית, $G\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$ בניגוד להנחתנו ש-Γ קונסיסטנטית.

ג. אילו היה $\Gamma,\phi(\mathsf{c})\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$ אז לפי משפט ההיסק $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\phi(\mathsf{c})\rightarrow\sigma$. נצא עתה מהוכחה ב-$\mathfrak{D}_0$ מ-Γ של $\phi(\mathsf{c})\rightarrow\sigma$ ונוסיף בסופה את הפסוק $\exists\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})\rightarrow\sigma$. פסוק זה מתקבל מקודמו $\phi(\mathsf{c})\rightarrow\sigma$ ע"י כלל הקיום כי c אינו מופיע בפסוקי Γ ולכן גם אינו מופיע ב-$\exists\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$, ואת הסתירה הטאוטולוגית σ יכולנו לבחור כך ש-c אינו מופיע בה. לכן סדרת הפסוקים שקבלנו היא הוכחה ב-$\mathfrak{D}_0$ מ-Γ של $\exists\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})\rightarrow\sigma$. פסוק זה והפסוק $\exists\mathsf{x}\phi(\mathsf{x})$ הנמצא ב-Γ גוררים טאוטולוגית את σ ולכן, ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית, $\Gamma\vdash_{\mathfrak{D}_0}\sigma$, בניגוד להנחתנו ש-$\Gamma$ קונסיסטנטית.

ד. דומה לגמרי ל-ג'.

12.25 השלמות במובן החלש בתחשיב ללא שיוויון. מערכת ההיסק $\mathfrak{D}_1$, שהיא מערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ ללא אקסיומות השיוויון, היא שלמה במובן החלש בתחשיב היחסים ללא שיוויון.

הוכחה. כל מה שנאמר לעיל על $\mathfrak{D}_0$ נכון גם ל-$\mathfrak{D}_1$ כי בשום מקום לא השתמשנו באשקסיומות השיוויון. במיוחד, כמו ב-12.2 $\mathfrak{D}_1$ היא שלמה במובן החלש אסם לכל פסוק ϕ כך ש- $\models_{\text{woeq}}\phi$ הפסוק $\neg\phi$ אינו קונסיסטנטי ב-$\mathfrak{D}_1$. היכן ש- $\models_{\text{woek}}$ משמעותו אמיתי לוגית בחתשיב ללא שיוויון.

אם ϕ אמיתית לוגית בתחשיב ללא שיוויון, אז $\neg\phi$ היא סתירה לוגית בתחשיב זה, ולכן עץ האמת שלה סופי וכל עלה שלו מכיל פסוק יסודי ושלילתו. נניח כי $\neg\phi$ קונסיסטנטית ב-Δ_1 ונראה שנקבל מכך סתירה. נבנה עתה ענף $b_1,\ldots,b_n$ בעץ זה, כאשר b_1 הוא השורש של העץ ו-b_n הוא עלה. ל- $1\leq i\leq n$ נסמן ב-Γ_i את קבוצת הפסוקים בצמתים b_1 עד b_i, ונוכיח באינדוקציה על i כי Γ_i קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$. נראה כי זה יתן לנו את הסתירה הדרושה. בעלה b_n נמצא פסוק אטומי ושלילתו, ולכן הם נמצאים ב-Γ_n. פסוק ושלילתו גוררים טאוטולוגית כל סתירה טאוטולוגית σ, ולכן $\Gamma_n\vdash_{\mathfrak{D}_1}\sigma$, בניגוד לכך ש-$\Gamma_n$ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$.

נגדיר כעת ברקורסיה על i את סדרת הצמתים b_i ובמקביל נוכיח באינדוקציה על i כי Γ_i קונסיסטנטית.

b_1 הוא שורש העץ ולכן $\Gamma_1=\{\neg\phi\}$ ולפי הנחתנו $\neg\phi$ קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$. כאשר $i<n$ אז בצומת b_i מתבצע בעץ טיפול בפסוק ψ הנמצא בצומת.

אם ψ הוא בעל אחת הצורות $\chi\wedge\rho$, $\neg(\chi\vee\rho)$, $\neg(\chi\rightarrow\rho)$, $\neg\neg\chi$, $\forall\mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ ו- $\neg\exists\mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ אז יש לצומת b_i

בן יחיד שאותו נקבע כ-b_{i+1}. בצומת זה נוספים פסוק אחד או שנים, שהם יכיחים מ-Γ_i ב-$\mathfrak{D}_1$ כפי שנראה מייד. לפי למת ההוספה 12.24א' גם Γ_{i+1} היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$. בארבעת המקרים הראשונים המנויים כאן הפסוקים הנוספים נובעים טאוטולוגית מן הפסוק המטופל ולכן, לפי כלל הגרירה הטאוטולוגית, הם יכיחים מ-Γ_i ב-$\mathfrak{D}_1$. במקרה בו הפסוק המטופל הוא $\forall \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ הפסוק הנוסף הוא $\rho(d)$, כאשר d הוא שם עצם קבוע, והוא יכיח מ-Γ_i ב-Δ_1 ע"י כלל מן הכלל אל הפרט. במקרה בו הפסוק המטופל הוא $\neg\exists \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ הפסוק הנוסף הוא $\neg\rho(d)$, כאשר d הוא שם עצם קבוע, והוא יכיח מ-Γ_i ב-$\mathfrak{D}_1$ כי $\neg\exists \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ והאקסיומה הלוגית $\rho(d) \to \exists \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ גוררים טאוטולוגית את $\neg\rho(d)$.

אם הפסוק המטופל ψ הוא בעל אחת הצורות $\chi \vee \rho$, $\chi \to \rho$, $\neg(\chi \wedge \rho)$ אז יש לצומת b_i שני בנים. בצומת אחד נוסף פסוק אחד שנסמנו ב-ψ_1 ובצומת השני נוסף פסוק שנסמנו ב-ψ_2, ופסוקים אלו הם כך ש $\psi_1 \vee \psi_2$ שקול טאוטולוגית ל-ψ. לפי למת ההוספה 12.23ב' לפחות אחת אחת הקבוצות Γ_i, ψ_1 ו-Γ_i, ψ_1 היא קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$. נקבע כ-b_{i+1} בן של b_i שהוספת הפסוק החדש שלו ל-Γ_i משאירה את הקבוצה קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_1$.

אם הפסוק המטופל ψ הוא בעל אחת הצורות $\exists \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ ו- $\neg\forall \mathsf{x}\rho(\mathsf{x})$ אז יש לצומת b_i בן יחיד שאותו נקבע כ-b_{i+1}. בבן יש פסוק נוסף יחיד שהוא, בהתאמה, $\rho(\mathsf{c})$ או $\neg\rho(\mathsf{c})$, היכן ש-c קבוע אישי שאינו מופיע בפסוקי Γ_i. לפי למת ההוספה 12.24ג' גם Γ_{i+1} היא קונסיסטנטית.

12.26 השלמות של $\mathfrak{D}_0$ במובן החלש. מערכת ההיסק $\mathfrak{D}_0$ היא שלמה במובן החלש

הוכחה. עלינו להוכיח שאם $\models \phi$ אז $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$. לפי משפט 11.31 בספר מכיוון ש- $\models \phi$ אז $\models_{\text{woeq}} \text{cong}_{\approx}(\phi) \to \phi$ היכן ש- $\text{cong}_{\approx}(\phi)$ הוא הפסוק האומר ש-$\approx$ הוא יחס חפיפה בשפה שקבועיה הם הקבועים המופיעים ב-ϕ. לכן, לפי 12.25, $\vdash_{\mathfrak{D}_1} \text{cong}_{\approx}(\phi) \to \phi$, ולכן גם $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \text{cong}_{\approx}(\phi) \to \phi$. כל הרכיבים של $\text{cong}_{\approx}(\phi)$ הם אקסיומות שיוויון ב-$\mathfrak{D}_0$ ולכן, ע"י כלל הגרירה הטאוטולוגית מתקבל $\vdash_{\mathfrak{D}_0} \phi$.

12.27 תרגיל. אפשר להוכיח ישירות את השלמות של $\mathfrak{D}_0$, ובכך גם להוכיח את משפט הקומפקטיות, בדרך הבאה.

א. הוכח כי השלמות של $\mathfrak{D}_0$ שקולה לטענה הבאה: כל קבוצה קונסיסטנטית ב-$\mathfrak{D}_0$ היא עקבית.

רמז: ראה את הוכחת שקילות שני הנוסחים של משפט הקומפקטיות.

ב. תהי Γ קבוצת פסוקים. בנה את עץ האמת המוזן שלה. אם העץ אינסופי הראה ש-Γ עקבית. אם עץ האמת המוזן של Γ הוא סופי הראה ש-Γ אינה קונסיסטנטית ע"י שתבנה ענף בעץ כך שאם Γ קונסיסטנטית אז גם Γ בתוספת הפסוקים בענף היא קונסיסטנטית.